

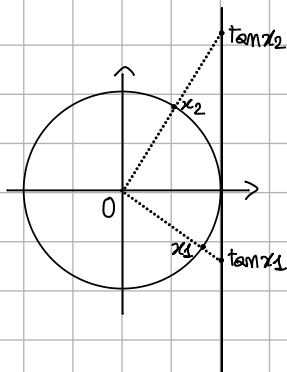
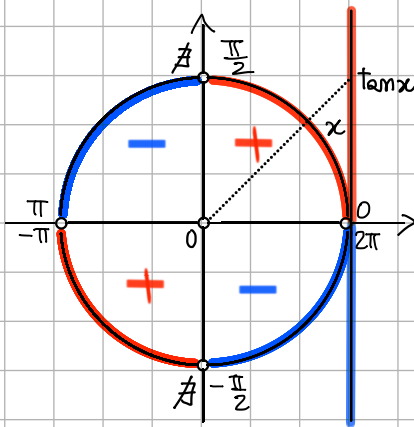
FUNZIONE TANGENTE

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

- il dominio di $\tan$ è $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$
- il codominio di $\tan$ è $\mathbb{R}$ $\tan \left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right) = \mathbb{R}$
- $\tan$ è una funzione dispari $\forall x \in \text{dom}(\tan) : \tan(-x) = -\tan x$
- $\tan$ è una funzione π -periodica
- $\tan$ è strettamente positiva in $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\tan$ è strettamente negativa in $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi) \forall k \in \mathbb{Z}$
- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\tan$ è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \forall k \in \mathbb{Z}$

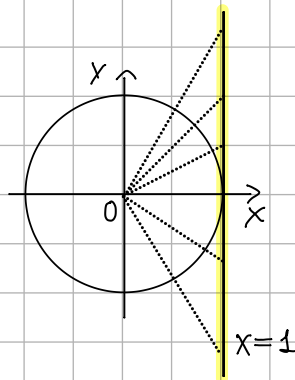
ATTENZIONE ∇ $\tan$ non è monotona nel suo dominio

- $\tan$ è illimitata sia superiormente che inferiormente
- $\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione bigettiva la cui inversa si chiama funzione ARCO TANGENTE e si denota con $\arctan$

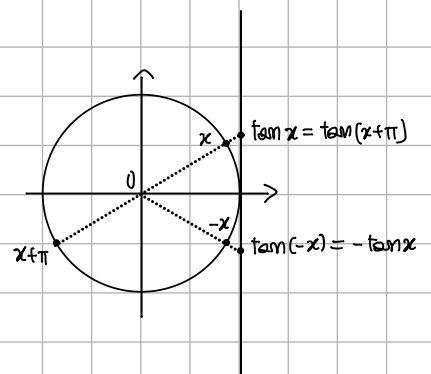


$$\forall x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right):$$

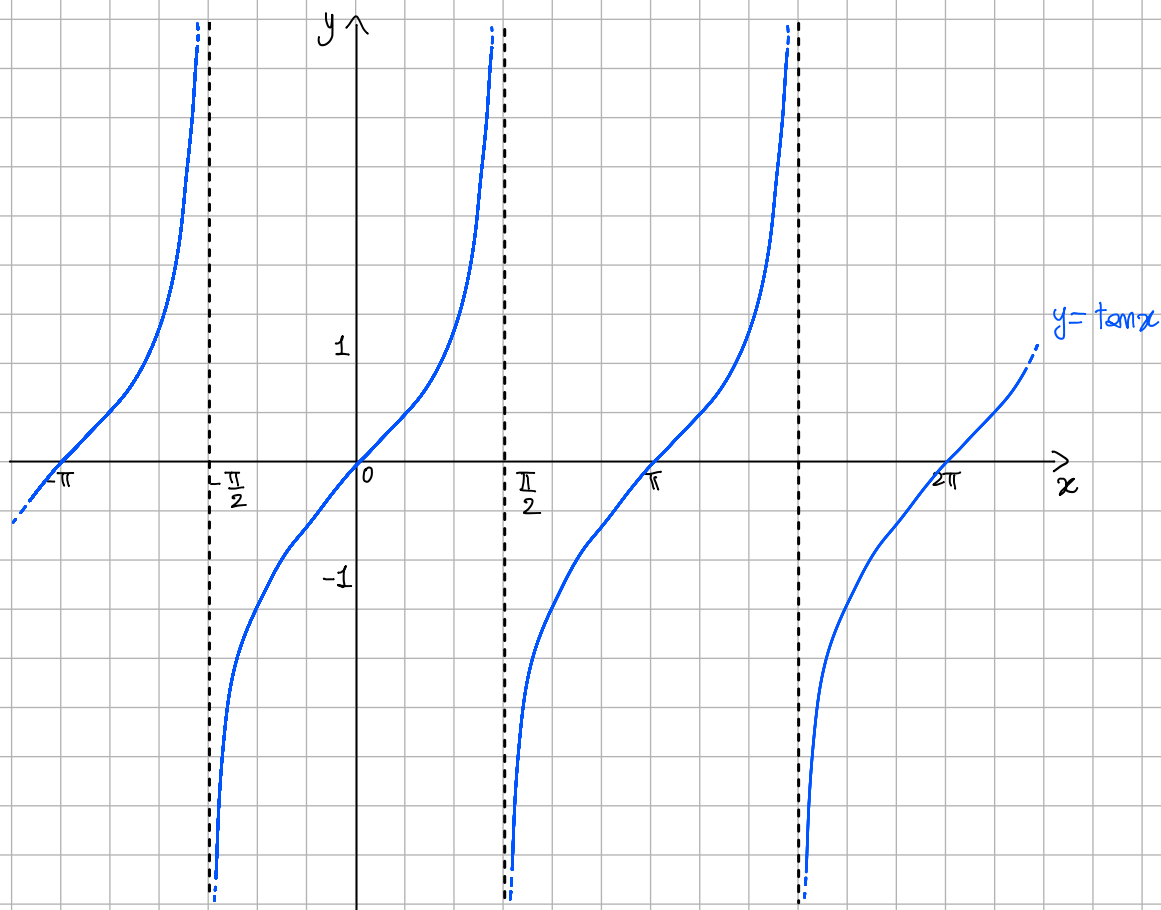
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \tan x_1 < \tan x_2$$



$\tan$ è illimitata superiormente e inferiormente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



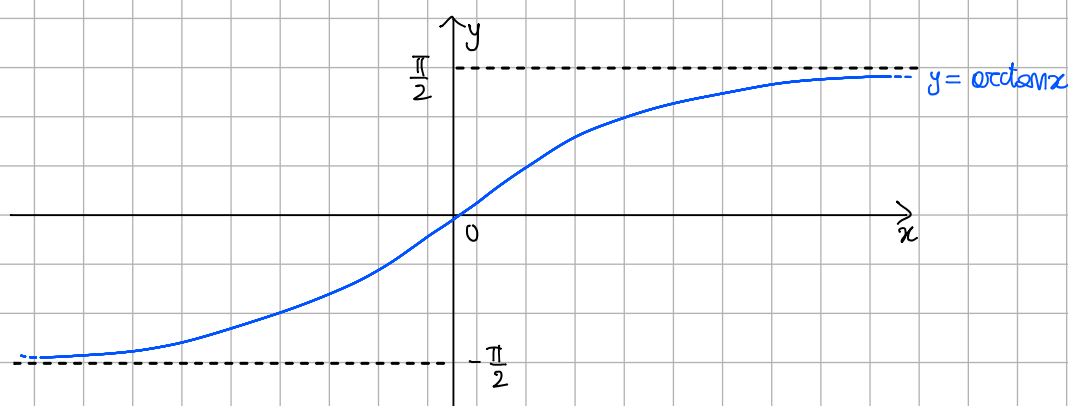
$\tan$ è una funzione π -periodica e dispari



$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad y = \arctan x \quad (\Leftrightarrow) \quad y \text{ è l'unico arco in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tale che } \tan y = x$

- il dominio di $\arctan$ è $\mathbb{R}$
- il codominio di $\arctan$ è $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $\arctan$ è una funzione dispari
- $\arctan$ è una funzione strettamente crescente
- $\arctan$ è strettamente positiva in $(0, +\infty)$
- $\arctan$ è strettamente negativa in $(-\infty, 0)$
- $\arctan x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\arctan$ è una funzione limitata, $\sup_{\mathbb{R}} \arctan = \frac{\pi}{2}$, $\inf_{\mathbb{R}} \arctan = -\frac{\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{2}$ non è massimo, $-\frac{\pi}{2}$ non è minimo



x	$\arctan x$
$-\sqrt{3}$	$-\pi/3$
-1	$-\pi/4$
$-\sqrt{3}/3$	$-\pi/6$
0	0
$\sqrt{3}/3$	$\pi/6$
1	$\pi/4$
$\sqrt{3}$	$\pi/3$

Formule geometriche

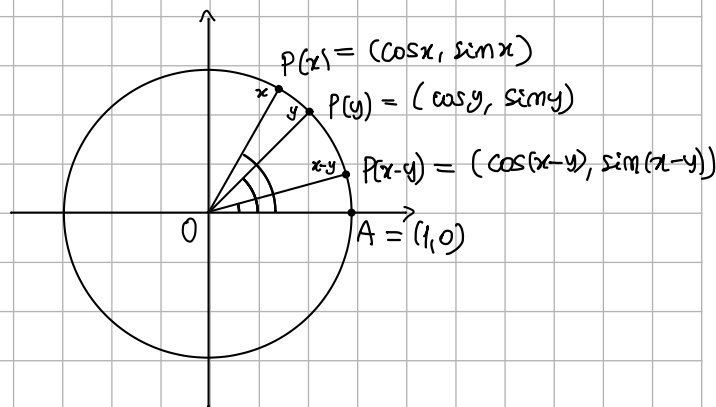
Formule di addizione e sottrazione

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$



dimostrazione

$\triangle OAP(x-y)$, $\triangle OP(y)P(x)$ sono triangoli isosceli congruenti $\Rightarrow d^2(A, P(x-y)) = d^2(P(y), P(x))$

$$\Rightarrow (1 - \cos(x-y))^2 + \sin^2(x-y) = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2\cos(x-y) + \cos^2(x-y) + \sin^2(x-y) = \cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x \sin y + \sin^2 y$$

$$\Rightarrow 2 - 2\cos(x-y) = 2 - 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) \Rightarrow \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) = \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y \\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \end{aligned}$$

$$\sin(x-y) = \sin(x+(-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Formule di duplicazione

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

dimostrazione: Formule di addizione con $y=x$ ci danno $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$,
 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

Formule di bisezione

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

+ se $x/2$ appartiene al I° o IV° quadrante

- se $x/2$ appartiene al II° o III° quadrante

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

+ se $x/2$ appartiene al I° o II° quadrante

- se $x/2$ appartiene al III° o IV° quadrante

dimostrazione: Dalle formule di duplicazione per il coseno

$$\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

Formule parametriche

Sia $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ per $x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Allora $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

dimostrazione: basterà che $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $\cos x \neq 0$: $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$$1+\tan^2 x = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) \cdot \frac{1}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Esempio

$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ $\rightarrow$ formule di sottrazione del coseno

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ $\rightarrow$ formule di sottrazione del seno

$$= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{\pi}{12} &= \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{6})^2 - 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{8 - 2\sqrt{12}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

Esempio

$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ $\rightarrow$ formule di addizione del coseno

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \sin \frac{\pi}{12} \rightarrow \boxed{\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \text{ formule archi associati}}$$

$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \cos \frac{\pi}{12}$$

$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cotan \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

Esempio

$\cos \frac{\pi}{3} = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$ $\rightarrow$ formule di duplicazione del coseno

$$= \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\sin \frac{\pi}{3} = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\hookrightarrow$ formula di duplicazione del seno

Esempio

$$\cos \frac{\pi}{8} = \cos \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \right) \stackrel{\text{formula di bisezione per il coseno}}{=} \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \\ = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

Formule di radicali doppi

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

è utile solamente se $a^2 - b$
è un quadrato perfetto

$$a=2=b$$

$$a^2 - b = 4 - 2 = 2$$

$$\sin \frac{\pi}{8} \stackrel{\text{formula di bisezione per il seno}}{=} \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

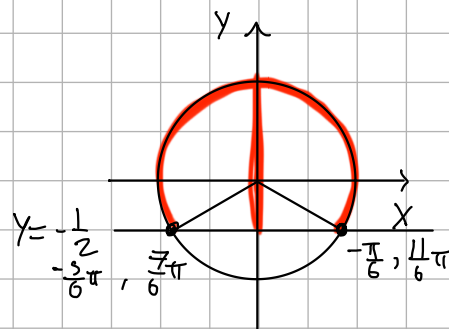
$$\tan \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{\pi}{8}} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2}} \\ = (2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{1}{2}} = (2 - \sqrt{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

Esercizio Calcolare $\cos(\frac{3}{8}\pi)$, $\sin(\frac{3}{8}\pi)$, $\tan(\frac{3}{8}\pi)$ [hint: usare $\frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$]

Equazioni e disequazioni goniometriche

$$1) 2\sin x > -1 \Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$$

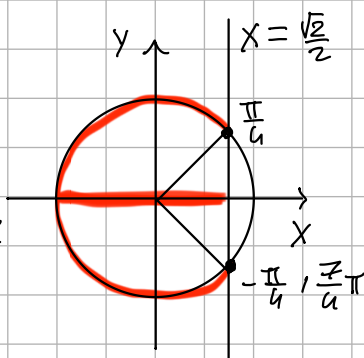
$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$2) \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$3) 3\cos^2 x - 2\cos x - 1 > 0$$

$$y = \cos x$$

$$3y^2 - 2y - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow y < -\frac{1}{3} \vee y > 1$$

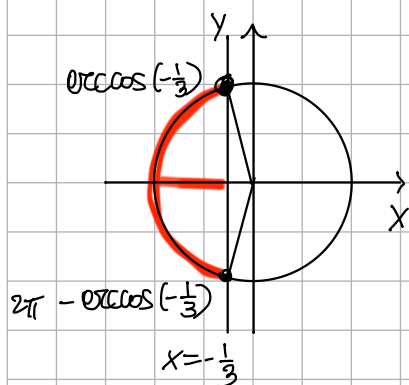
$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-1) = 16$$

$$y_{1/2} = \frac{2 \pm 4}{6} < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$\cos x < -\frac{1}{3} \vee \cos x > 1$$

impossibile

$$\Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{3}$$

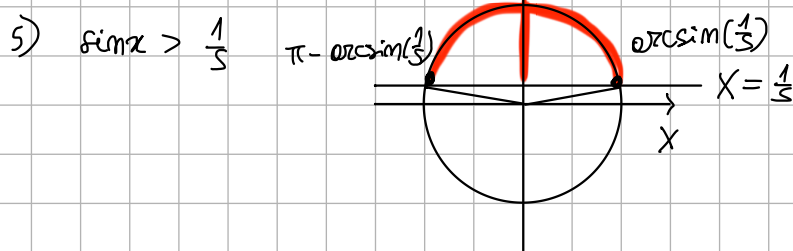
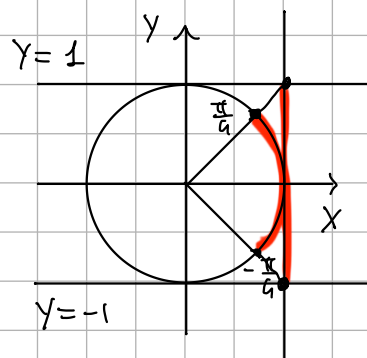


$$2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi < x < \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

h) $\tan^2 x \leq 1$ $y = \tan x$

$$y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \tan x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi < x < \pi - \arcsin \frac{1}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

6) $\sin x + \cos x + 1 \leq 0$

utilizziamo le formule parametriche

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

controlliamo preliminarmente se $x = \pi + 2k\pi$ è soluzione

$$\sin \pi + \cos \pi + 1 = 0 - 1 + 1 = 0 \leq 0 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \text{ è soluzione}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t+1-t^2+1+t^2}{1+t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2t+2}{1+t^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t^2+1} \leq 0 \Leftrightarrow t+1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) \leq -1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\pi + 2k\pi < x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

l'insieme delle soluzioni delle disuguaglianze

$$-\pi + 2k\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

